Hartmut Spiegel

Rechnen auf eigenen Wegen

Addition dreistelliger Zahlen zu Beginn des 3. Schuljahres*

Würden Sie Kindern zu Beginn des dritten Schuljahres die Aufgabe zumuten, vier dreistellige Zahlen zu addieren, deren Summe auch größer als 1000 sein kann? Zu einem Zeitpunkt, zu dem in einem Unterricht nach Schulbuch gerade die ersten zaghaften Ausblicke über 100 hinaus beginnen? Ob Ihre Antwort „Ja“ oder „Nein“ lautet – in beiden Fällen kann ich mir vorstellen, daß Sie gespannt sind, zu erfahren, was passiert ist, als wir Kindern solche Aufgaben gestellt haben. Wir jedenfalls waren fasziniert davon, wie eifrig, kreativ und erfolgreich die Kinder sich diesem Problem stellten. „So – so“ – höre ich Sie schon sagen – „Meinen Sie etwa diese geschmierten Zettel auf der Seite nebendran? Das finden Sie gut? Da wüßte ich gern mal – warum?“

Genau das möchte ich Ihnen erläutern – sofort am Beispiel von Annikas Zettel – ehe ich dann ein wenig zum Hintergrund sage, dann weitere Zettel kommentiere und schließlich Bilanz ziehe und meine Schlußfolgerungen zur Diskussion stelle.

Annikas Rechnung

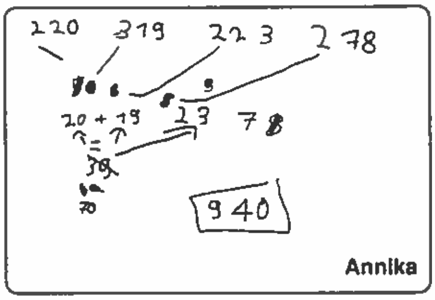
Schauen Sie sich mal in Ruhe *Annikas* Zettel an: Wie ist sie vorgegangen? Wie hat sie es aufgeschrieben? Was ist richtig und was falsch?

Auch wir /1/ brauchten einige Zeit, bis wir durchblickten: Vermutlich hat sie – nach den vier zu addierenden Zahlen – nacheinander folgendes *geschrieben*: 50, 6, 8 (nacheinander wieder durchgestrichen); dann 20 + 19 = 39; dann 23, 78; dann 62; dann 70 (62 und 8 (von der 78) wieder durchgestrichen; dann 9; dann 940 (und 9 wieder durchgestrichen).

Gerechnet hat sie wahrscheinlich so:

1. 200 + 300 = 500	
2. 500 + 200 = 600	6. 62 + 8 = 70
3. 600 + 200 = 800	7. 70 + 70 = 140
4. 20 + 19 = 39	8. 800 + 100 = 900
5. 39 + 23 = 62	9. 900 + 40 = 940

Sie hat also bis auf einen „Flüchtigkeitsfehler“ alles richtig gerechnet. Und mit wieviel Phantasie und Eigenständigkeit hat sie das Darstellungsproblem gelöst: Anfänglich wählt sie die Notation so, daß ein anderer den Rechenweg gut verfolgen kann: die Striche von den vier



Annika

Hunderterziffern nach unten, um die sukzessive Addition darzustellen; die vollständige Gleichung zur Addition der ersten beiden zweistelligen Zahlen. Dann geht sie zunehmend zu einer ökonomischeren Schreibweise über, die auch das Nachvollziehen ihrer Vorgehensweise etwas erschwert. Ihr einziger echter Verstoß gegen gängige Konventionen besteht darin, daß sie 50 für 500 schreibt – wahrscheinlich, weil ihr nach der ersten Null einfällt, daß sie entbehrlich ist. Aber wer von uns benutzt nicht auch gelegentlich unkorrekte Schreibweisen bei entsprechenden Gelegenheiten? Sollen wir Annika den Spaß verderben, indem wir gleich daran rummäkeln?

Meinen Sie nun nicht auch, daß in dem auf den ersten Blick chaotisch, rätselhaft und undurchschaubar wirkenden Zettel mehr steckt, als man zunächst vermutet? Bevor ich weitere Zettel kommentiere, ein kurzer Bericht darüber, warum und wie diese Zettel überhaupt zustande kamen:

Warum und wie sind die Zettel entstanden?

Am Anfang stand ein Zufall. Die Kinder in der Klasse meiner Frau hatten gleich zu Beginn des dritten Schuljahres an einem Leichtathletikfest der Schule, den Bundesjugendspielen, teilgenommen, und sie war gerade dabei, für jedes Kind die Gesamtpunktzahl auszurechnen, d. h. jedes Mal vier dreistellige Punktzahlen per Hand zu addieren. Eigentlich wollte ich ihr nur die Arbeit abnehmen, das mit dem Computer erledigen und schön übersichtlich darstellen, aber als ich dabei war, fragte ich mich: Warum lassen wir das die Kinder eigentlich nicht selbst machen? Ist das nicht ein schöner Anlaß, der die Bezeichnung „Problem“ im doppelten Sinne verdient? Denn: *Einerseits* sind die Kinder begierig, das Ergebnis zu erfahren, es ist also *ihr* Problem. *Andererseits* gehört es nicht zu ihrem Standardrepertoire, solche Aufgaben zu lösen, geschweige denn, den dazugehörigen Lösungsweg aufzuschreiben – es ist also ein *echtes Problem* und *keine Routineaufgabe*. Sie können zwar im Hunderterraum Zahlen mit selbsterarbeiteten Methoden addieren und von daher ist das Addieren dreistelliger Zahlen in ihrer Reichweite, aber sie haben es erst noch vor sich, den Tausenderraum als solchen (Notation, dezimale Strukturierung, Größenvorstellungen, Anordnung) systematisch zu erarbeiten.

Gedacht – getan: Den Kindern wurde gesagt, sie sollten sich ihre Punktsumme selbst ausrechnen und ihren Rechenweg auch so aufschreiben, daß ich hinterher sehen könne, was und wie sie gerechnet haben. Sie waren mit großem Eifer bei der Sache, und am Ende hatte ich 13 Zettel /2/. Aus Platzgründen sind hier nur 4 besonders interessante „Rechnungen“ verkleinert abgedruckt (vgl. S. 6), die ich jetzt ein wenig eingehender kommentieren werde.

Betrachtung weiterer Beispiele

(Britta, Andrea, Sebastian K., Sebastian P.)

Brittas Zettel fällt auf durch ihre originelle Darstellung. Sie vermindert den Schreibaufwand, läßt aber im Prinzip gut nachvollziehen, wie sie vorgegangen ist (wobei in manchen Punkten offen bleiben muß, in welcher Reihenfolge): Sie addiert erst die Hunderter zu 1300, dann schrittweise die zweistelligen Zahlen, wobei sie ein Ergebnis zwischendurch zur Hundertersumme addiert und am Ende die zu 100 zusammengefaßten beiden Fünfziger vergißt:
50 + 50 = 100; 88 + 4 = 92;
92 + 42 = 134; 1300 + 134 = 1434;
1434 + 8 = 1442.
Die zweite Aufgabe – Addition der drei besten Punktzahlen – löst sie korrekt, wobei sie gegen die Regeln des Umgangs mit dem Gleichheitszeichen verstößt.

Andrea bricht ihren ersten Versuch mit 2 + 3 = 5 + 81 = 581 ab, womöglich, weil ihr die Addition von 72 zu letzterem zu schwer fällt. (Welcher Lehrerin läuft es nicht kalt den Rücken herunter, wenn sie diese Gleichung sieht?) Aber trotz formal nicht korrekter Schreibweise weiß sie genau Bescheid, was bei ihr welche Ziffer an welcher Stelle bedeutet – wie eine spätere Befragung zeigt. Im 2. Versuch addiert sie erst die Hunderter, dann die Summe zweier geschickt gewählter zweistelliger Zahlen (32 + 72) dazu und schließlich die restlichen zweistelligen Zahlen Schritt für Schritt. Hierbei verwendet sie das Gleichheitszeichen als Ergibtzeichen, ohne die vorweggegangene Operation zu notieren. Sie verrechnet sich im ersten Anlauf um 10, korrigiert sich dann zu einem Ergebnis, das noch weiter vom richtigen abweicht. (Was sie sich da gedacht hat, muß wohl im Dunkeln bleiben.)

Ihre zweite Rechnung (die drei besten) ist korrekt, wird ohne Gleichheitszeichen notiert und amüsiert durch den geschickten „Übergang" von 104 zu 1004.

Sebastian K. hat alles sehr ausführlich aufgeschrieben. Als Vorbereitung für 90 + 10 und 80 + 20 hat er die 30 in 10 + 20 zerlegt, offensichtlich aber nicht gewußt, wie er so etwas aufschreiben soll. 30 = 10 + 20, das ist nicht die Beschreibung einer Rechnung für Sebastian. Er hilft sich mit 30 : 3 = 10, um 10 als Ergebnis zu produzieren. An anderer Stelle verwendet er das „Kreuzworträtselprinzip", um Schreibarbeit zu sparen.

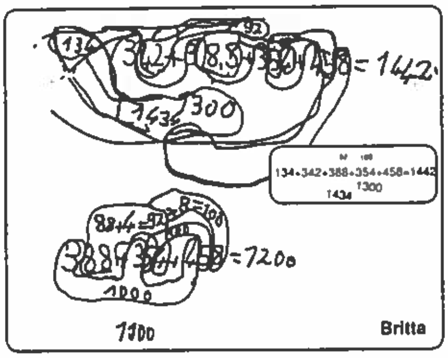
Sebastian P. hat auch alles aufgeschrieben. Er ist unsicher mit der Schreibweise, sowohl, wo es über den Hunderter geht, wo er sich noch korrigiert, als auch bei 1101, was er als 2001 schreibt. (Den gleichen Fehler macht er bei einem Interview im Rahmen einer Nachuntersuchung. Er bemerkt ihn aber selbst, und ein neuer Anlauf führt – ohne Vorsagen – zur richtigen Schreibweise.) Er schreibt vollständige Gleichungen und verwendet senkrechte Trennstriche, um den Abschluß einer Rechnung deutlich zu machen.

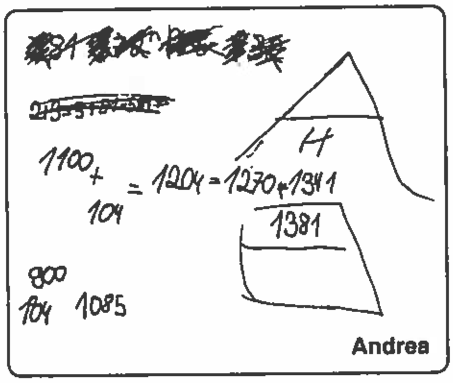
Im folgenden möchte ich nun zusammenfassen, was mir hinsichtlich *Notation*, *Strategien* und *Fehlern* nach sorgfältiger Analyse aller Zettel der Kinder erwähnenswert erscheint:

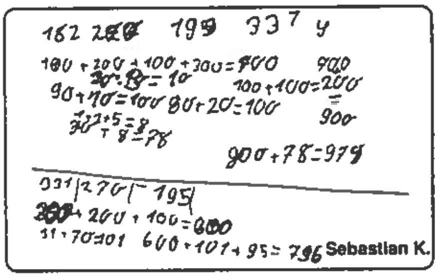
Zusammenfassende Bemerkungen zu Notation, Strategien und Fehlern

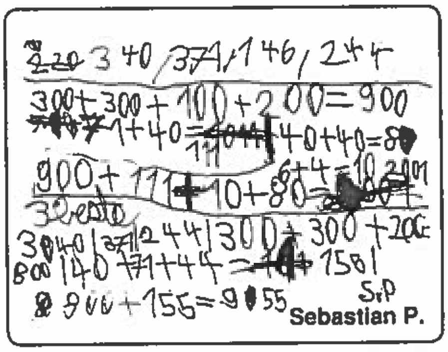
Notation

Ich hoffe, daß Ihre von mir angeregte und gelenkte Beschäftigung mit den fünf Beispielen Ihr Verständnis dafür geweckt hat, daß ich es für unangebracht und sogar schädlich halte, schriftliche Darstellungen von Problemlösungen dieser Art an formalen Ansprüchen zu messen, die an anderer Stelle angebracht sein mögen. Jedenfalls ist mein Fazit bei der Bewertung dessen, was die Kinder in









punkto Darstellung geleistet haben, das folgende:

Die Kinder zeigen bei der Bewältigung der nicht gerade geringen Anforderung, ihren Lösungs- oder Rechtfertigungsweg für die Lösung einer komplexen Aufgabe darzustellen, eine erstaunliche Kompetenz.

Sie

– sind *erfindungsreich*, z. B. Annika durch ihre Striche, Britta durch die Kringel, Sebastian P. durch den senkrechten Strich als Markierung für das Ende der Rechnung und Tim durch die Numerierung der Schritte,

– tendieren zu *ökonomischen Schreibweisen*, z. B. Andrea durch äußerst knappe Notation, Sebastian K. durch „Kreuzzahlanordnung" und Tim durch die unvollständige Gleichung und

– beschreiten *unkonventionelle Wege*. Damit meine ich die abweichende Verwendung des Gleichheitszeichens bei Andrea, Britta, Holger sowie die selbstkonstruierte Zahlschreibweise im unerschlossenen Bereich bei Julia (1300 = 3000) und Sebastian P. (1201 = 2001). Sie haben auch die Gelegenheit genutzt, zu erfahren, „wie Schreib- und Bildfiguren auf dem Papier das Gedächtnis entlasten und die Gedankenführung stützen", und waren kreativ beim „Erfinden einer problemangemessenen Zeichensprache". /3/

Im Gegensatz zu den Darstellungsweisen und Notationen der Lehrgänge, die den Kindern vorgesetzt werden und häufig das Lernen erschweren /4/ (man denke nur an die künstlich erzeugten Probleme beim Zehnerübergang am Ende des ersten Schuljahrs), handelt es sich hier um vom Kind selbstgewählte Darstellungsformen, die ihm die Aufgabe erleichtern, den Lösungsweg darzustellen. Damit ich nicht mißverstanden werde: Ich möchte damit keineswegs sagen, daß die *Entwicklung und Pflege* gemeinsam geteilter Darstellungsformen nicht auch eine wichtige Aufgabe des Grundschulunterrichts ist, doch das sollte nicht dazu führen, daß die Kinder immer so lange warten müssen, etwas inhaltlich zu bearbeiten, bis sie es formal korrekt darstellen können. (Das fängt ja schon im ersten Schuljahr an!)

Strategien

Natürlich wird nicht alles von dem sichtbar, wie die Kinder gerechnet haben, und manches, was da steht, ist vielleicht auch nur eine nachträgliche Rechtfertigung des Ergebnisses. Dennoch ist es interessant, sich mal einen *Überblick* zu verschaffen:

Fast alle Kinder beginnen mit der Addition der Hunderter. Dann kommen die kleineren Anteile der Zahlen. Da die Kinder ja schon vorgeprägt sind durch die Arbeit mit der Addition im Hunderterraum im 2. Schuljahr, kann man schwerlich von einer spontanen Strategie sprechen – auch wenn man sich gut vorstellen kann, welches der Grund wäre, wenn sie spontan entwickelt würde: Die großen Bestandteile der Zahlen sind im Hinblick auf die Zahlvorstellung und die praktische Bedeutung der Zahlen die wichtigeren, und sie werden ja auch zuerst gesprochen. Eine Vorprägung, die dieser Tendenz entgegenkommt, geschieht durch die gängige Einführung der Addition zweistelliger Zahlen: Erst solche Aufgaben wie 30 + 40, dann 37 + 20 etc. Das Problem, was sich im dritten Schuljahr dann ergibt, ist bekannt: Bei der Einführung des Normalverfahrens der schriftlichen Addition muß man die Kinder dazu anhalten, mit den Einern zu beginnen – bzw. sie entdecken lassen, warum das zweckmäßig ist.

Beim Hinzuaddieren der zweistelligen Zahlen kann man dann – im Gegensatz zur obigen Beobachtung bei den Hundertern – fast genausoviele verschiedene Rechenwege finden, wie es Kinder gibt. Fast alle unterscheidbaren Variationen kommen vor, z. B.:

– die Zehnerzahlen der Reihenfolge nach einzeln, dann die Einer,
– die Zehnerzahlen einzeln, aber geschickt zerlegt und neugruppiert zu Hunderterpaaren,
– zweistellige Zahlen plus einstellige so, wie sie gut zusammenpassen,
– die zweistelligen Zahlen nacheinander zur Summe der Hunderter.

Ich finde diese Vielfalt überwältigend und meine, den Kindern sollte so lange wie nur möglich Gelegenheit gegeben werden, ihre eigenen Wege zu gehen. Der gültige Lehrplan vereitelt dies leider, da er den Unterricht in den Standardverfahren für die schriftliche Addition und Subtraktion im dritten Schuljahr verbindlich macht.

Daß die Kinder aber eine solche Vielfalt von Strategien verwenden und auch die Darstellung ihrer Lösungswege so eigenständig gestalten, ist zuallererst auch darauf zurückzuführen, daß ihr Lernen vom ersten Schultag konsequent nach den *Prinzipien des aktiv-entdeckenden Lernens* (vgl. *Wittmann-Müller* 1990) gestaltet wurde. Es ist z. B. guter Brauch in der Klasse, beim gemeinsamen Rechnen die Kinder zu ermuntern, nach verschiedenen Lösungswegen zu suchen und bei jedem Ergebnis – sei es richtig oder falsch – auch mitzuteilen, wie man dahin gekommen ist.

Fehler

Zum Schluß des Überblicks noch ein kurzer Blick auf die Fehler: Sie kommen einem – mir jedenfalls – angesichts der relativ hohen Anforderung nicht so tragisch vor:

– in vier Fällen um 1, 10 bzw. 100 verrechnet (bzw. vergessen) (Annika, Andrea, Britta, Raphael);
– zweimal Hunderterüberschreitung vergessen (Florian);
– in zwei Fällen wahrscheinlich inhaltlich richtig gerechnet, aber formal falsch aufgeschrieben („Behelfsschreibweise" bei Julia und Sebastian P.);
– drei (bisher) unerklärbare Fälle (Florian, Karsten, Tim).

Betrachtet man die Gesamtzahl der notwendigen Einzelschritte, so ist die Fehlerquote – auch wenn fast die Hälfte der Endergebnisse falsch ist – sehr gering.

Folgerungen

1. Das Gehen eigener Wege – auch wenn es von außen betrachtet manchmal als umständlich erscheint – ist im Sinne der Lernziele, auf die es ankommt, fruchtbarer als das Nachlaufen ausgetretener Pfade oder Befahren betonierter Autobahnen, auf denen alle Hindernisse aus dem Weg geräumt sind. Die Kinder können ihr eigenes Denken entwickeln und erproben und ihr Selbstvertrauen stärken.
2. Die von den Kindern beschrittenen Wege erfordern besseres Zahlgefühl und eine höhere arithmetische Kompetenz als die monotone Mechanik des Normalverfahrens. Wenn sie diese Wege gehen, werden diese Fähigkeiten daher auch mehr gefordert und gefördert. Insofern ist es äußerst fragwürdig, die Normalverfahren schon so früh einzuführen. (Rechnen nach dem Normalverfahren ist prinzipiell nicht besser, als den Taschenrechner zu benutzen, abgesehen davon, daß das kleine Einspluseins geübt wird – das wird es bei den eigenen Methoden der Kinder aber auch.)
3. Da die Vorgehensweisen der Kinder ihnen selbst in den allermeisten Fällen ökonomischer erscheinen werden als die, die das gängige halbschriftliche Verfahren vorsieht, würden sie es als Rückschritt empfinden, wenn man ihnen dieses aufdrängen würde.
4. Der Versuch, diesen Kindern schriftliche Rechenverfahren mit Hilfe von Material nahebringen zu wollen, wäre überflüssig, eine Zeitverschwendung und möglicherweise eine Erschwernis. Solche Versuche beruhen auf der unseligen Ideologie, alles nur Mögliche mit Material modellieren zu müssen. Das heißt nicht, daß es nicht Gelegenheiten gibt, bei denen Material hilfreich oder sogar notwendig sein kann. Aber es soll heißen, daß Modellierung kein universelles Prinzip ist, das undifferenziert überall angewendet werden kann.

Schlußbemerkung

Warum habe ich diesen Artikel geschrieben?

Ich hoffe, viele von Ihnen dadurch ermuntert und Ihnen Mut gemacht zu haben, Kindern mehr zuzutrauen und mehr in dieser Art mit ihnen zu arbeiten. Konkret heißt das: Einerseits nach interessanten Nichtroutineaufgaben suchen, andererseits – wie in diesem Fall – spontan passende Situationen nutzen und die Kinder mit Problemen konfrontieren, für deren Lösung ihnen gewisse Grundlagen zur Verfügung stehen, bei denen sie aber selbst noch etwas einbringen können und müssen. Den Kindern dann gestatten, ihre Lösungswege auch auf nichtkonventionelle Weise darzustellen, ohne zu befürchten, daß damit eine Grundlage für späteres Chaos geschaffen wird. Den Kindern also auch schon dann erlauben, an Problemen zu arbeiten, wenn sie noch nicht vollständig in der Lage (oder auch willens) sind, die Lösung normgerecht aufzuschreiben. Sie können auf diese Weise mehr von dem zeigen, was sie wirklich können, und die Lehrerin hat mehr Gelegenheit, etwas über das Denken ihrer Kinder zu erfahren.

Was für den Sprachunterricht schon seit längerer Zeit gefordert und sicherlich auch häufiger umgesetzt wird, nämlich die Kinder erzählen und eigene Texte schreiben zu lassen, auch wenn sie das, was sie erzählen oder schreiben, noch nicht korrekt schreiben können, ist in analoger Weise für den Mathematikunterricht längst überfällig. Verhindert wird das möglicherweise dadurch, daß die Mathematik gleichgesetzt bzw. verwechselt wird mit ihrer üblichen schriftlichen Darstellung. □

Literatur

Abele, A. u. a.: Überlegungen und Materialien zu einem neuen Lehrplan für den Mathematikunterricht der Grundschule. In: Die Schulwarte 23 (1970) Heft 9/10, S. 117 - 128

Wittmann, W. u. Müller, G.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. 1. Stuttgart (Klett) 1990

* Der Text ist die ausgearbeitete Fassung eines Vortrages, den ich im Juni 1993 an der Universität Dortmund im Rahmen des 3. Symposiums des Projektes „mathe 2000" gehalten habe.

1 Mit „Wir" ist hier außer mir noch mein Kollege *Christoph Selter* von der Universität Dortmund gemeint, dem ich an dieser Stelle ausdrücklich danken möchte. Ohne unsere Gespräche über dieses Material wäre dieser Artikel vielleicht gar nicht entstanden. Viele der hier wiedergegebenen Gedanken hatten dort ihren Ursprung. Weiterhin danke ich meinen Mitarbeiter(n)/-innen *Catharina Becker, Andrea Fromm* und *Peter Ölker* für ihre Mithilfe.

2 Es handelt sich um eine Klasse, in der 14 nichtbehinderte und 5 behinderte Kinder gemeinsam lernen. Darin werden sie von zwei Lehrern: einer Grundschullehrerin und einem Sonderschullehrer unterstützt. Die Klasse gehört zu einem Modellversuch, der trotz positiver Erfahrungen demnächst – wohl hauptsächlich aus finanziellen Gründen – beendet wird.

3 Dies sind Zielformulierungen aus einem m. E. nach wie vor aktuellen Katalog allgemeiner Lernziele aus der Zeit des Beginns der Reform, nachzulesen z. B. in *Abele* 1970

4 Daß die Anforderung, etwas gemäß den üblichen Konventionen darzustellen, vielfach eine zusätzliche Schwierigkeit mit sich bringt und „es sich leichter denkt", wenn man die Dinge mehr nach eigenem Gusto darstellen darf, ist eine Erfahrung, die außer mir sicherlich auch viele von Ihnen gemacht haben.

220 319 223 278

20 + 19 23 78

39

940

Annika

1100 + 104 = 1204 = 1270 + 1341

1381

800

104 1085

Andrea

134 342 + 388 + 354 + 458 = 1442

92

1434 1300

134+342+388+354+458=1442

92 100

1434 1300

88+4=92 +8=100

388+354+458=1200

1000

1100

Britta

162 200 199 337 4

100 + 200 + 100 + 300 = 700

30 + 70 = 100

90 + 10 = 100 80 + 20 = 100

2 + 5 = 8

30 + 8 = 78

700

100 + 100 = 200

=

900

900 + 78 = 979

331 270 195

300 + 200 + 100 = 600

31 + 70 = 101 600 + 101 + 95 = 796

Sebastian K.

220 340 371 146 244

300 + 300 + 100 + 200 = 900

71 + 40 = 111 40 + 40 = 80

900 + 111 + 10 + 80 6 + 4 = 10

340 371 244 300 + 300 + 200

800 140 71 + 44 = 1501

900 + 155 = 955

SP

Sebastian P.

376

387

307

423

300 + 300 + 300 + 400

= 3000

3000 + 87 = 3087

3087 + 7 = 3088

3088 + 23 = 4001

4001 + 76 = 4078

Julia

FLO

~~663~~

200 + 200 + 100 = 500

657

500 + 90 + 90 = 580

580 + 70 = 650 + 90 = 640

640 + 8 + 7 + 6 = 663

Florian

64 + 194 + 283 + 237 = 273

1 100 + 200 + 200 = 500

3 500 + 273 =

2 94 + 64 + 83 + 37 = 273

183

Tim